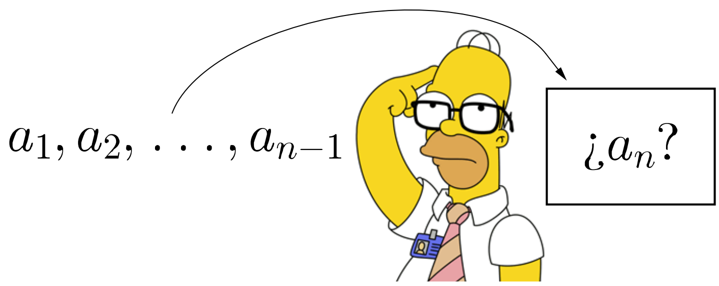
MAT²
MATerials MATemàtics
Volum 2014, treball no. 1, 10 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Disquisiciones acerca de las “leyes de formación” de ciertas sucesiones

Juan de Burgos Román
Antonio Roberto Martínez Fernández

Todos nos hemos encontrado alguna vez con alguna pregunta similar a ésta: Dados los primeros elementos de una sucesión a_1, a_2, a_3 y a_4 (por ejemplo $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{4}{5}$, $a_3 = \frac{9}{7}$ y $a_4 = \frac{16}{9}$), se pide averiguar cuál es el siguiente elemento (el a_5). De nosotros se espera que descubramos una ley, no demasiado retorcida, que funcionando para los primeros elementos dados, permita calcular los siguientes (en este caso, se espera que intuyamos que lo razonable es tomar $a_n = \frac{n^2}{1+2n}$).



En este tipo de preguntas se da por supuesto que estamos capacitados para la adivinación, pues es evidente que el elemento a_5 podría ser otro cualquiera, aunque en los casos usuales, como el anterior, hay un a_5 que resulta mucho más *razonable* que otros.

Estas preguntas tienen la virtud de avivar la imaginación y el ingenio, pero su respuesta no debiera ser “a_n es $a_n = \frac{n^2}{1+2n}$”, sino “un buen valor para a_n podría ser $a_n = \frac{n^2}{1+2n}$”. Véase, por ejemplo, el caso de la sucesión 0, 3, 0, 3, …; si nos preguntan por los dos siguientes elementos, la respuesta más inmediata, y la que se espera de nosotros, es $a_5 = 0$ y $a_6 = 3$. Sin embargo, también podrían valer, por ejemplo, $a_5 = 24$ y $a_6 = 75$, ya que la expresión $a_n = 2n^3 - 15n^2 + 34n - 21$ proporciona, para $n = 1$, 2, 3 y 4, los valores a_1, a_2, a_3 y a_4 dados, y para $n = 5$ y $n = 6$ conduce a $a_5 = 24$ y $a_6 = 75$.

A este asunto de “averiguar el siguiente elemento”, se suele acudir, también, con fines un tanto humorísticos. Este es el caso de “Averiguar cuál es el siguiente elemento de la sucesión que empieza con estos siete elementos 2, 10, 12, 16, 17, 18, 19”. Después de buscar alguna ley razonable de formación, termina uno por rendirse y, entonces, se nos contesta que el siguiente elemento es el 200, ya que la sucesión está formada por los números naturales cuyo nombre empieza por d.

A título de ejemplos en los que no es nada fácil averiguar cuál es el elemento siguiente, valgan estos dos:

$$0,\ -2,\ -3,\ 8,\ 95,\ 680,\ a_7 \quad \text{y} \quad 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ b_{12}.$$

En estos casos, una respuesta posible es $a_7 = 4991$ (en general $a_n = n! - n^2$) y $b_{12} = 5$ (en general b_n es el número de divisores de n distintos del propio n).

Si se considera la sucesión

$$41,\ 43,\ 47,\ 53,\ 61,\ 71,\ 83,\ 97,\ 113,\ 131,\ 151,\ 173,\ 197,\ 223, \ldots$$

cualquiera que tenga despierta la mente matemática reconocerá que son números primos. Una *ley de formación* para tal sucesión viene dada por el polinomio $f(n) = n^2 + n + 41$ introducido por Euler. En efecto, los números de la lista anterior son $f(n)$, para $n = 0, 1, 2, \ldots, 13$. Así que, según esta regla, el siguiente número debiera ser $f(14) = 251$, también primo. Pero notemos que esta lista, generada a partir del polinomio de Euler, no genera siempre números primos. De hecho, se tiene que $f(n)$ es primo para $n = 0, 1, 2, \ldots, 39$, pero $f(40) = 41^2$ es compuesto. El anterior polinomio de Euler da 40 términos consecutivos de una sucesión que son números primos, y podríamos pensar que hay un polinomio (no constante) f de manera que $f(m)$ es primo para cada $m \geq 0$. Pero no hay que gastar el tiempo buscando tal polinomio, porque no existe, como nos muestra el siguiente resultado:

Proposición. *No existe ningún polinomio no constante $f \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $f(m)$ sea primo para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio tal que $f(m)$ es un número primo para cada $m \in \mathbb{N}$. En particular,

$f(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = p$ es primo. Pero entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ se tendría que

$$\begin{aligned} f(1 + k\,p) &= a_n(1 + k\,p)^n + a_{n-1}(1 + k\,p)^{n-1} + \cdots + a_1(1 + k\,p) + a_0 \\ &= (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0) + M(k)\,p = (1 + M(k))\,p\,, \end{aligned}$$

siendo $M(k)$ un número entero, que depende de k. Como este valor ha de ser primo, para cada $k \in \mathbb{N}$, concluímos que $M(k) = 0$ y $f(1 + k\,p) = p$, para cada $k \in \mathbb{N}$. De modo que $f \equiv p$ es constante, ya que un polinomio no constante verifica $\lim\limits_{|x|\to\infty} |f(x)| = \infty$, luego sólo puede tomar un valor fijado un número finito de veces. $\square$

Ante el problema de hallar, dado un número finito de términos de una sucesión, *el* siguiente término de un modo razonado, podemos optar (si el ingenio o la paciencia se nos agotan) por introducir los términos de la sucesión que nos proporcionan en la página web *La Enciclopedia On-Line de las Secuencias de Números Enteros*, http://oeis.org/?language=spanish, donde hay un buscador que nos dice si la sucesión que buscamos ha aparecido antes en algún lugar relevante. Esta página web es especialmente útil para problemas combinatorios. Pero uno se podría topar con el siguiente problema, puesto adrede para hacer desistir de su análisis al más pintado:

> *Sea dada la siguiente sucesión, de* 40 *dígitos (números naturales de* 0 *a* 9*):*
>
> $$\begin{aligned} &4, 8, 2, 6, 0, 4, 8, 3, 7, 1, 5, 9, 3, 7, 2, 6, 0, 4, 8, 2, \\ &\qquad 6, 1, 5, 9, 3, 7, 1, 5, 0, 4, 8, 2, 6, 0, 4, 9, 3, 7, 1, 5. \end{aligned}$$
>
> *Se pide obtener una "ley de formación" (función $f(n)$, con $n \in \mathbb{N}$, expresada en términos de funciones utilizadas por los alumnos de* 1$^{\text{er}}$ *curso de cualquier carrera de ciencias) que, verificándose para los* 40 *primeros valores de n dados, proporcione los infinitos elementos restantes de la sucesión.*

A pesar del aparente caos que presenta esta sucesión (que, por cierto, no se encuentra en la base de datos del buscador de la página web citada anteriomente), uno puede empezar a pelearse con este problema observando que en dicha sucesión aparecen dos *ciclos* de 7 dígitos, uno con números pares, y otro con impares. Además, es fácil ver que si ha aparecido el ciclo *abcdeab*, la siguiente aparición de tal ciclo es *cdeabcd*. Tampoco hay que hacer arcos de iglesia para darse cuenta de que el primer ciclo de todos, el $4, 8, 2, 6, 0, 4, 8$, no es más que la última cifra de multiplicar por 4 los números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, y que el primer ciclo de impares, $3, 7, 1, 5, 9, 3, 7$, es el resultado de multiplicar los números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ por 4, restarles 1, y quedarnos con la última cifra.

Ahora, ayudados del hecho de que, si $m \in \mathbb{N}$ es un número natural entonces su última cifra es $UC(m) = m - 10\left[\frac{m}{10}\right]$, siendo $[x]$ la parte entera de cada número real $x \in \mathbb{R}$ (es decir, el mayor número entero menor o igual que x), y acudiendo a las potencias de -1, podemos obtener (quizá tras equivocarnos en los primeros intentos) que:

$$f(n) = \left(1 + (-1)^{\left[\frac{n-1}{7}\right]}\right)\left(2\psi(n) - 5\left[\frac{2\psi(n)}{5}\right]\right) + \frac{1 - (-1)^{\left[\frac{n-1}{7}\right]}}{2}\left(4\psi(n) - 1 - 10\left[\frac{4\psi(n) - 1}{10}\right]\right),$$

con

$$\begin{aligned}
\psi(n) &:= \varphi(n) + 2\left[\frac{n-1}{14}\right], \\
\varphi(n) &:= \frac{1 + (-1)^{\left[\frac{6-r(n)}{6}\right]}}{2}\, r(n) + \frac{7}{2}\left(1 - (-1)^{\left[\frac{6-r(n)}{6}\right]}\right), \\
r(n) &:= n - 7\left[\frac{n}{7}\right].
\end{aligned}$$

Aunque esta función da una *ley de formación* válida, hemos de confesar que la sucesión dada (la de 40 dígitos) se obtuvo de otro modo muy distinto: el elemento n-ésimo es la primera cifra decimal del número que resulta de multiplicar por n la raíz cuadrada de 2, es decir

$$f_{\text{inicial}}(n) = \left[n\, 10\sqrt{2}\,\right] - 10\left[\frac{\left[n\, 10\sqrt{2}\,\right]}{10}\right].$$

Nos parece estar ante un hecho enormemente sorprendente, el de que dos leyes de formación tan dispares se satisfagan para, nada menos, que las cuarenta primeros elementos de la sucesión dada. Así que nos parece natural preguntarse si eso de los *ciclos* de números pares e impares es algo que está ligado al número $\sqrt{2}$ o si también se daría este hecho si, en vez de $\sqrt{2}$, se tomase otro número “puñetero”. De esta forma se nos ocurre repetir el mismo esquema sustituyendo $\sqrt{2}$ por, pongamos, el logaritmo neperiano de 5, y nos encontramos, de nuevo, con algo parecido: una sucesión “semidomesticada”, esta vez en *ciclos* de 10 números pares y 11 números impares. Los 42 primeros elementos de tal sucesión son

$$6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 7, 3, 9, 5, 1, 7, 3, 9, 5, 1, 7,$$
$$4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 5, 1, 7, 3, 9, 5, 1, 7, 3, 9, 5,$$

y su “ley de formación” es, en este caso,

$$F_{\text{inicial}}(n) = \big[n\,10\,\log 5\,\big] - 10\left[\frac{\big[n\,10\,\log 5\,\big]}{10}\right].$$

Nos preguntamos, de la misma manera que con el otro ejemplo, si podríamos dar una “ley de formación” similar. Tras unos cálculos, más o menos tediosos, encontramos que

$$\begin{aligned} F(n) = \Big(1+(-1)^{h(n)}\Big)\left(3\,\widehat{\psi}(n) - 5\left[\frac{3\,\widehat{\psi}(n)}{5}\right]\right) \\ + \frac{1-(-1)^{h(n)}}{2}\left(6\,\widehat{\psi}(n) + 1 - 10\left[\frac{6\,\widehat{\psi}(n)+1}{10}\right]\right), \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} h(n) &:= \left[\frac{k(n)}{11}\right], \\ \widehat{\psi}(n) &:= \widehat{\varphi}(n) + 3\left[\frac{n-1}{21}\right], \\ \widehat{\varphi}(n) &:= \frac{1+(-1)^{h(n)}}{2}\,k(n) + \frac{1-(-1)^{h(n)}}{2}\,(k(n)-10), \\ k(n) &:= \frac{1+(-1)^{\left[\frac{20-\widehat{r}(n)}{20}\right]}}{2}\,\widehat{r}(n) + \frac{21}{2}\left(1-(-1)^{\left[\frac{20-\widehat{r}(n)}{20}\right]}\right), \\ \widehat{r}(n) &:= n - 21\left[\frac{n}{21}\right]. \end{aligned}$$

Al principio nos pareció extraordinariamente asombroso que en las fórmulas obtenidas no apareciese por ningún lado ni $\sqrt{2}$ ni $\log 5$. Lo cual nos llevó a preguntarnos si acontecería que $f = f_{\text{inicial}}$ y si $F = F_{\text{inicial}}$.

Pues bien, aquí viene la gracia de este asunto. Resulta que las “leyes de formación” relativas a la primera sucesión son iguales hasta el término 203, pero

$$f_{\text{inicial}}(204) = 4 \neq 5 = f(204),$$

y las de la segunda sucesión son iguales hasta el término 73, pero

$$F_{\text{inicial}}(74) = 0 \neq 1 = F(74).$$

El mensaje que nos gustaría transmitir con todo esto es que para los asuntos de hallar “leyes de formación” tenemos que ser cautelosos por partida doble. En primer lugar, porque encontrar una “ley de formación” *razonable* puede no ser un tema en absoluto trivial, y, en segundo lugar, porque aunque parezca que sólo puede haber una “ley de formación” *razonable*, puede haber varias (y bien distintas entre sí).

1. Deducción de “leyes de formación” generales

En esta sección pasamos a atacar el problema de encontrar una ley de formación como las que aparecían con $\sqrt{2}$ o $\log 5$, pero en el caso general. Suponemos, pues, que una tal sucesión viene dada por *ciclos* de pares de longitud ℓ, y ciclos de impares de longitud m. A continuación, disponemos la sucesión por filas, en las que en cada fila van, por orden, un bloque de pares y uno de impares. Suponemos que los primeros ℓ pares se obtienen como el resultado de multiplicar los números $1, 2, \ldots, \ell$ por un número par r y quedarnos con la última cifra; y que los primeros m impares se obtienen como el resultado de multiplicar los números $1, 2, \ldots, m$ por el número par r, sumarle un número impar s (positivo o negativo), y quedarnos con la última cifra. En cada paso de una fila a otra, el bloque de pares $a_1 a_2 \ldots a_\ell$ se cambia por $a_{1+p} a_{2+p} \ldots a_\ell a_1 a_2 \ldots a_p$, y el bloque de impares $b_1 b_2 \ldots b_m$ se cambia por $b_{1+p} b_{2+p} \ldots b_m b_1 b_2 \ldots b_p$.

A continuación distinguimos dos casos:

1.1. Caso $\ell = m$

Definimos la posición de n en cada bloque como

$$r(n) := n - \ell \left[\frac{n}{\ell} \right].$$

Notemos que estos números aparecerán en este orden dentro de cada bloque: $1, 2, \ldots, \ell - 1, 0$. De modo que nos interesa cambiar estas posiciones a $1, 2, \ldots, \ell - 1, \ell$. Esto lo conseguimos mediante la función

$$\varphi(n) := \frac{1 + (-1)^{\left[\frac{\ell - 1 - r(n)}{\ell - 1}\right]}}{2}\, r(n) + \frac{1 - (-1)^{\left[\frac{\ell - 1 - r(n)}{\ell - 1}\right]}}{2}\, \ell.$$

Ahora nos interesa *mover* cada ciclo de números pares $a_1 a_2 \ldots a_\ell$ a los ciclos $a_{1+p} a_{2+p} \ldots a_\ell a_1 a_2 \ldots a_p$ en cada paso de fila, y lo mismo para cada ciclo de números impares. Para ello, definimos

$$\psi(n) := \varphi(n) + p \left[\frac{n - 1}{2\,\ell} \right].$$

Con todo esto, tenemos que la ley de formación sería, en este caso,

$$f(n) = \frac{1 + (-1)^{\left[\frac{n-1}{\ell}\right]}}{2}\, UC(r\,\psi(n)) + \frac{1 - (-1)^{\left[\frac{n-1}{\ell}\right]}}{2}\, UC(r\,\psi(n) + s).$$

1.2. Caso $\ell \neq m$

Este caso es análogo, pero tenemos que modificar un poco las fórmulas. Definimos la posición de n en cada fila como el número

$$\widehat{r}(n) := n - (\ell + m)\left[\frac{n}{\ell + m}\right].$$

Como antes, estas posiciones van etiquetadas en el orden $1, 2, \ldots, \ell+m-1, 0$, y nos interesa que aparezcan como $1, 2, \ldots, \ell+m-1, \ell+m$. Para ello, definimos

$$\widehat{k}(n) := \frac{1 + (-1)^{\left[\frac{\ell+m-1-\widehat{r}(n)}{\ell+m-1}\right]}}{2}\,\widehat{r}(n) + \frac{1 - (-1)^{\left[\frac{\ell+m-1-\widehat{r}(n)}{\ell+m-1}\right]}}{2}\,(\ell + m).$$

Definimos el siguiente número auxiliar, que nos dice si *caemos* en un bloque de pares o uno de impares:

$$\widehat{h}(n) := \left[\frac{\widehat{k}(n)}{\ell + 1}\right].$$

Así, la posición de n dentro de cada bloque será el número

$$\widehat{\varphi}(n) := \frac{1 + (-1)^{\widehat{h}(n)}}{2}\,\widehat{k}(n) + \frac{1 - (-1)^{\widehat{h}(n)}}{2}\,(\widehat{k}(n) - \ell).$$

Ahora, definimos la siguiente función, que mueve las posiciones de los bloques según avanzamos la fila,

$$\widehat{\psi}(n) := \widehat{\varphi}(n) + p\left[\frac{n-1}{\ell + m}\right].$$

Finalmente, la ley de formación resulta, en este caso,

$$\widehat{f}(n) = \frac{1 + (-1)^{\widehat{h}(n)}}{2}\,UC(r\,\widehat{\psi}(n)) + \frac{1 - (-1)^{\widehat{h}(n)}}{2}\,UC(r\,\widehat{\psi}(n) + s).$$

2. Una caracterización exótica de los racionales

En esta sección nos olvidamos de $\sqrt{2}$ y $\log 5$, pensamos en un número real cualquiera $\gamma \in \mathbb{R}$, y estudiamos el comportamiento de la sucesión cuyo término n-ésimo es la primera cifra decimal $n\gamma$. Como consecuencia, obtendremos una caracterización de los números racionales en función de la periodicidad de dichas sucesiones.

Para ello, dado $\gamma \in (0,1)$, consideramos la función

$$f_\gamma(n) := UC(n\,10\,\gamma) = \big[n\,10\,\gamma\big] - 10\left[\frac{\big[n\,10\,\gamma\big]}{10}\right].$$

Observemos que la función *última cifra*, UC, estaba definida para los números naturales, pero tiene sentido considerarla definida para cada número real $x \in \mathbb{R}$ mediante $UC(x) := UC(|[x]|)$.

Proposición 2.1. *Si $\gamma \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, entonces $f_\gamma(n)$ es periódica.*

Demostración. Pongamos γ como fracción irreducible $\gamma = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$. Entonces f_γ es q-periódica. En efecto,

$$f_\gamma(n+k\,q) = UC((n+k\,q)\,10\,\gamma) = UC(n\,10\,\gamma+10\,k\,p) = UC(n\,10\,\gamma) = f_\gamma(n),$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Aquí hemos usado que para cada entero $m \geq 1$ se verifica que $UC(10\,m + \alpha) = UC(\alpha)$, para cada real $\alpha > 0$. $\square$

Parece natural preguntarse si se verifica el recíproco. Es decir, si $f_\gamma(n)$ es periódica, ¿γ es racional? De ser esto cierto, habríamos demostrado que no existe un número irracional θ de modo que $f_\theta(n)$ sea periódica. Así, si proponemos el problema de encontrar la ley de recurrencia de una sucesión de pares-impares *semidomesticada*, y resulta que, cogiendo un irracional θ de modo que dicha sucesión sea aparentemente periódica (hasta cierto término), sabremos con seguridad que la sucesión formada "explota" en algún término. Es decir, en algún momento, se deja de cumplir la *ley lógica* de formación de la sucesión. Esto es lo que sucede cuando γ es $\sqrt{2}$ ó $\log 5$.

Veamos que, efectivamente, se verifica el recíproco de la Proposición 2.1. Para ello, se necesita un resultado previo sobre sucesiones periódicas:

Lema 2.2. *Sea $\{s_n\}_n$ una sucesión periódica y $a > 0$ un número entero positivo. Entonces la subsucesión $\{s_{a^n}\}_n$ es finalmente periódica (es decir, periódica a partir de un término).*

Demostración. Supongamos que $\{s_n\}_n$ es q-periódica, y realicemos la división entera de a^n entre q. Así, $a^n = q\,c_n + r_n$, con $c_n \geq 0$ y $0 \leq r_n < q$. De esta manera, ver que $\{s_{a^n}\}_n$ es finalmente periódica equivale a que la sucesión de restos $\{r_n\}_n$ sea finalmente periódica.

Calculando a^{n+1} como $a \cdot a^n$, haciendo la división entera de a^{n+1} entre q e igualando estos valores, obtenemos

$$a^{n+1} = q\,a\,c_n + r_n\,a = q\,c_{n+1} + r_{n+1},$$

de donde $r_{n+1} - r_n\, a = q\,(a\, c_n - c_{n+1})$ es múltiplo de q. Luego, tomando clases en[1] $\mathbb{Z}_q$, obtenemos que

$$\langle r_{n+1}\rangle = \langle r_n\, a\rangle.$$

Análogamente,

$$\langle r_{n+2}\rangle = \langle r_{n+1}\, a\rangle = \langle r_n\, a^2\rangle,$$

y, en general,

$$\langle r_{n+k}\rangle = \langle r_n\, a^k\rangle.$$

Como $\mathbb{Z}_q$ es finito, existirá un $k_0 \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ tal que $\langle r_{n+q}\rangle = \langle r_{n+k_0}\rangle$ y, al ser los restos $0 \leq r_{n+q}, r_{n+k_0} < q$, tendremos que $r_{n+q} = r_{n+k_0}$. Esto nos indica que la sucesión $\{r_n\}_{n>k_0}$ es $(q-k_0)$-periódica, como queríamos ver. □

Como consecuencia, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *Sea $\gamma \in (0,1)$. Si $f_\gamma(n)$ es periódica, entonces $\gamma \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$.*

Demostración. Ver que $\gamma \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ es lo mismo que decir que la sucesión $f_\gamma(10^n)$ es finalmente periódica. Pero esto es consecuencia del Lema 2.2 con el entero $a = 10$. □

De este modo, obtenemos una caracterización de los números racionales en el intervalo $(0,1)$.

Corolario 2.4. *Sea $\gamma \in (0,1)$. Entonces $\gamma \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ si, y sólo si, la sucesión $f_\gamma(n)$ es periódica.*

Visto esto, podemos decir, sin hacer los cálculos explícitos, que las sucesiones $f_{\sqrt{2}}(n)$ y $f_{\log 5}(n)$ no son periódicas, a pesar de la aparente periodicidad que presentan en los primeros términos.

Por otra parte, es inmediato observar que, si $m \in \mathbb{N}$ y $\gamma > 0$, entonces $f_{m+\gamma}(n) = f_\gamma(n)$. Además, si $\alpha < 0$, entonces $f_\alpha(n) = f_{|\alpha|}(n)$. Dicho esto, obtenemos la siguiente caracterización, algo exótica, de los números racionales:

Corolario 2.5. *Sea $\gamma \in \mathbb{R}$. Entonces $\gamma \in \mathbb{Q}$ si, y sólo si, la sucesión $f_{|\gamma|}(n)$ es periódica.*

[1] $\mathbb{Z}_q$ es el *anillo cociente* $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Es decir, es el conjunto formado por las clases residuales módulo q (los restos que se obtienen al dividir números enteros por q):

$$\mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \ldots, \langle q-1\rangle\}.$$

Un buen libro de álgebra básica, que puede servir para una toma de contacto con los anillos cociente es [1].

Observemos, finalmente, que hay sucesiones periódicas de enteros entre 0 y 9 que no corresponden a ningún número real γ. En efecto, consideremos la sucesión 3-periódica:

$$1,\ 7,\ 9,\ 1,\ 7,\ 9,\ 1,\ 7,\ 9, \ldots$$

Como es periódica, en caso de corresponder a algún número real γ, éste ha de ser racional. Pero, si nos restringimos al intervalo $(0,1)$, tendremos que $\gamma = \frac{p}{q}$, con $\mathrm{mcd}(p,q) = 1$, entonces $q = 3$ y γ sólo puede ser $1/3$ ó $2/3$. Pero $\{f_{1/3}(n)\}_n = \{3,6,0,3,6,0,3,6,0,\ldots\}$ y $\{f_{2/3}(n)\}_n = \{6,3,0,6,3,0,6,3,0,\ldots\}$, que no corresponden a la sucesión 3-periódica dada.

Referencias

[1] Dorronsoro J., Hernández E., *Números, grupos y anillos*, Addison-Wesley, 2001.

[2] Niven I., Zuckerman H., *Introducción a la teoría de los números*, Limusa, México, 1976.

Juan de Burgos Román
Departamento de Fundamentos Matemáticos
Escuela Técnica de Ingenieros Aeronáuticos
Madrid
juan.deburgos@upm.es

Antonio Roberto Martínez Fernández
Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia
Campus de Espinardo
Murcia
antonioroberto.martinez@um.es

Publicat el 5 de febrer de 2014